**УДК 656.025.4** *DOI:10.46960/62045_2022_1_4*

**М.П. Каретникова, А.И. Маслеев, А.Д. Кулязин, А.В. Липенков**

# АНАЛИЗ УСОВЕРШЕНСТВОВАННОГО АЛГОРИТМА КЛАРКА-РАЙТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

***Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева***

Проанализирован и усовершенствован один из эвристических методов решения задачи маршрутизации транспорта: алгоритм Кларка-Райта. Рассмотрены математическая модель метода, параметры алгоритма и результаты его тестирования.

***Ключевые слова:*** задача маршрутизации транспорта, алгоритм Кларка-Райта, *vehicle routing problem, Anylogic*.

За последние двадцать лет значительно возрос интерес к проблеме маршрутизации транспортных средств. Это обусловлено тем, что стоимость доставки товаров стала ключевым фактором для большинства транспортных компаний. Задача сводится к созданию оптимальных маршрутов доставки товаров из одного или нескольких складов в ряд географически разбросанных городов или клиентов с учетом ограничений. Решение данной задачи позволяет рационально составить маршруты, снизить расход топлива и затраты времени на перевозку за счет снижения пробега транспортного средства. G. Dantzig и J. Ramster в конце 1950-х гг. впервые предложили задачу маршрутизации транспортных средств (ЗМТ, *Vehicle Routing Problem, VRP*), рассмотрев проблему доставки бензина от конечной подстанции магистрального трубопровода до множества заправочных станций парком идентичных грузовых автомобилей [1].

Формулировка главного вопроса, соответствующего задаче маршрутизации транспортных средств, может быть выражена следующим образом: «Каков оптимальный набор маршрутов для парка транспортных средств одинаковой грузоподъемности, необходимый для полного удовлетворения потребностей заданного набора клиентов?» При этом должны быть соблюдены следующие условия:

- каждый клиент может быть посещен только один раз;
- каждый маршрут транспортного средства должен начинаться и заканчиваться в депо;
- общая потребность для каждого маршрута транспортного средства не должна превышать грузоподъемность этого транспортного средства $Q$.

Математически ЗМТ может быть выражена следующим выражением:

$$min \sum_{i\in V} \sum_{j\in V} c_{ij} \cdot x_{ij} \tag{1}$$

где $c_{ij}$ – стоимость проезда от клиента $i$ до клиента $j$; переменная $x_{ij}$ – двоичная переменная, которая имеет значение 1, если дуга $(i,\ j)$ включена в решение, иначе принимает значение 0.

Ограничения, накладываемые на *VRP*, принимают вид:

$$\sum_{i\in V} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in V \tag{2}$$

$$\sum_{j\in V} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V \tag{3}$$

$$\sum_{i\in V} x_{i0} = K \tag{4}$$

$$\sum_{j\in V} x_{0j} = K \tag{5}$$

$$\sum_{i\notin S} \sum_{j\in S} x_{ij} \geq r(S), \quad \forall S \subseteq V \tag{6}$$

$$x_{ij} \in \{0,\ 1\}, \quad \forall i,\ j \in V \tag{7}$$

где $K$ – количество доступных транспортных средств; $r(S)$ – минимальное количество транспортных средств, необходимых для обслуживания $S$ – набора клиентов; 0 – узел-депо.

Ограничения (2) и (3) гарантируют, что каждый клиент будет посещен только один раз. Ограничения (4) и (5) утверждают, что количество автомобилей, выезжающих из депо, равно количеству автомобилей, возвращающихся в него. Ограничение (6) гарантирует, что спрос на каждом маршруте не превышает грузоподъемность каждой единицы подвижного состава. Последнее ограничение гарантирует целостность и сходимость задачи.

Задача маршрутизации имеет множество вариаций в зависимости от требований к построению маршрута. Четыре из них приведены далее.

1. Capacitated VRP (CVRP): каждое транспортное средство имеет ограниченную и грузоподъемность.
2. VRP with Time Windows (VRPTW): каждый заказчик должен быть обслужен в определенное «временное окно».
3. Multiple Depot VRP (MDVRP): используются несколько депо для обслуживания клиентов.
4. Split Delivery VRP (SDVRP): каждый клиент может обслуживаться одновременно несколькими машинами

С течением времени классическая задача маршрутизации развивалась, в результате чего появилось множество ее подвидов. Эти подвиды рассмотрены далее.

## 1. Точные подходы

Предполагается вычисление всех возможных решений до тех пор, пока не будет достигнут один из лучших результатов. Примеры подхода: Метод ветвей и границ, Метод ветвей и обрезов.

По причине ограниченной эффективности точных подходов значительное внимание и исследовательские усилия были ориентированы на разработку действенных эвристических алгоритмов, которые могут гарантировать максимально приближенные к оптимальным решения для крупномасштабных задач.

## 2. Эвристические методы

Выполняется относительно ограниченное исследование пространства поиска и получаются качественные решения за относительно малое время.

Эвристические методы, в свою очередь, подразделяется на три категории, содержание которых раскрыто ниже.

1. Двухфазные методы: задача декомпозируется на две ее естественные составляющие: кластеризация вершин в возможные маршруты и фактическое построение маршрута с возможными обратными связями между двумя этапами. Примеры: метод Фишера и Якумара, «Алгоритм лепестков», «Алгоритм развертки», метод Таиларда.
2. Метаэвристики: «Муравьиный алгоритм», метод имитации отжига, «Генетический алгоритм», метод детерминации отжига, «Поиск табу».
3. Конструктивные методы: постепенно строится возможное решение, учитывая при этом стоимость решения, при этом не содержит фазу улучшения. Наиболее широкое распространение получили: метод соответствий, эвристика мультимаршрутного улучшения, метод Кларка-Райта.

Алгоритм экономии Кларка-Райта, относящийся к классу конструктивных методов, является наиболее известной эвристикой для VRP. Метод основан на понятии эффекта (выгоды), который получается от объединения двух маятниковых маршрутов в один кольцевой. Каждый из маятниковых маршрутов начинается и заканчивается в депо, как правило, имеющим нулевой индекс.

Эффект от объединения этих двух маршрутов в один равен

$$f_{ij} = l_{0i} + l_{j0} - l_{ij} \qquad (8)$$

где $l_{0i}$– расстояние от центрального пункта до пункта $i$, $l_{j0}$ – расстояние от пункта $j$ до центрального пункта, $l_{ij}$ – расстояние между пунктами $i$ и $j$.

Таким образом, некоторые маршруты можно объединять, в соответствии с величиной «выгоды», в более крупные маршруты. Решение заканчивается, когда дальнейшее объединение маршрутов станет невозможно. Это может быть по двум причинам: либо не осталось ни одного положительного значения выгоды (т.е. объединять невыгодно), либо при объединении превышается грузовместимость автомобиля, что нарушает одно из правил задачи маршрутизации транспорта. У данного метода, однако, есть и недостатки, одним из них является то, что эффективность его работы падает по мере приближения к концу вычислений, в то время как в начале работы решения получаются относительно удачные. Во избежание этого базовый алгоритм претерпел следующие изменения: *Gaskell* ввел параметр формы маршрута λ [2]. Параметр λ применяется, чтобы выделить расстояние между клиентами от расстояния до депо. Когда параметр λ принимает большое значение (больше 1), то маршрут не строится, так как $i$ и $j$ далеко друг от друга.

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} \tag{9}$$

где $c_{ij}$ – расстояние между точками $i$ и $j$, , $c_{0i}$ и $c_{0j}$- расстояния между клиентом $i$ и $j$ и депо соответственно, λ – параметр формы маршрута.

Дополнение внес также *Paessens*, добавив еще одно слагаемое, которое учитывает асимметрию между клиентами $i$ и $j$ относительно их расстояния до депо [3]. Слабость слагаемого заключается в том, что выбираются точки близкие к депо, что не всегда является самым быстрым и правильным решением.

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} + \mu|c_{0i} + c_{j0}|, \tag{10}$$

где $c_{ij}$ – расстояние между точками $i$ и $j$, , $c_{0i}$ и $c_{0j}$ – расстояния между клиентом $i$ и $j$, и депо соответственно, $\mu$ – новый параметр.

*Altinel* и *Oncan* предложили рассматривать потребительские требования в дополнение к расстояниям [4]. Это обусловлено тем, что в конце решения часто происходит слияние маршрутов с очень близкой экономией. Коэффициент ν в их формуле принимает только положительные значения, поэтому сначала рассматриваются клиенты с наибольшим спросом, что не всегда является лучшим решением.

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} + \mu|c_{0i} + c_{j0}| + \nu \frac{d_i + d_j}{\bar{d}} \tag{11}$$

где $d_i$ – спрос клиента $i$, $c_{ij}$ – дистанция между клиентами $i$ и $j$, $c_{0i}$ и $c_{0j}$ – расстояния между клиентом $i$ и $j$, и депо соответственно, ν – новый параметр. $\bar{d}$ - средний спрос клиентов.

Еще одним дополнением базового алгоритма Кларка-Райта служит предложение *Altinel* и *Oncan* о рассмотрении информации об оставшейся вместимости автомобиля.

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - \lambda c_{ij} + \mu|c_{0i} + c_{j0}| + \gamma \frac{(D-d_i)+(D-d_j)}{D-\bar{d}} \tag{12}$$

где $D$ – вместимость автомобиля, новый параметр γ рассматривает относительную важность, придаваемую клиентам с меньшими требованиями, что приводит к увеличению оставшейся вместимости автомобиля.

Заключительными дополнениями, рассматриваемыми в работе, являются несколько изменений, которые внесли *Doyuran* и *Catay* [5].

1. Во второе слагаемое внести коэффициент косинуса полярных координатных углов клиентов с депо. Если клиенты находятся близко друг к другу в полярной системе координат, то угол будет острым и коэффициент положительным. Если же клиенты далеко друг от друга угол будет тупым, а коэффициент примет отрицательное значение. Этот коэффициент подразумевает, что клиенты, расположенные близко друг к другу, будут находится в одном и том же маршруте.
2. Изменить второе слагаемое формулы: теперь оно включает в себя значение разности максимального расстояния между всеми парами клиентов и среднее значение расстояний

между клиентами $i$ и $j$ и депо, а также косинус угла, связанного с клиентами $i$ и $j$. Параметр $\mu$ сохраняется. Это изменение позволяет отдать приоритет раннему рассмотрению клиентов, расположенных рядом с депо.

3. Третье слагаемое также как у *Altinel* и *Oncan* отражает спрос клиента, но основная идея другая. Параметр ν может принимать и положительные и отрицательные значения. Значение экономии увеличивается, если средний спрос рассматриваемой пары клиентов отличается от общего среднего значения. То есть, два клиента, оба имеющие низкие или высокие требования оказываются выше в списке экономии и рассматриваются в первую очередь. Третье слагаемое направлено на то, чтобы клиенты с высокими и низкими требованиями находились в одном и том же маршруте, таким образом, минимизировать потери пропускной способности. Если ν примет отрицательные значения, то клиентские пары, имеющие средний спрос, близкий к общему среднему, будут находится в верхней части списка сохранения, а клиентские пары, имеющие большой или маленьких спрос, в конце. Удержание пар клиентов, имеющих наименьшие и наибольшие требования, в нижней части списка экономии улучшает использование вместимости автомобиля, особенно в конце маршрута.
4. Первые два слагаемых это расстояния, а третье отражает спрос клиентов, не имеющий единицы измерения. Таким образом, если единица измерения изменится (например, с километров на метры), то одно и тоже значение ν также не будет работать, значит, он должен быть скорректирован в новом интервале поиска, а это требует дополнительных вычислительных усилий. Чтобы этого избежать, предлагается нормализовать функцию экономии, в которой расстояния делятся на максимальное расстояние, а требования делятся на максимальный спрос.

Итоговый вид, который прибрела формула Кларка-Райта:

$$s_{ij} = \left[\frac{c_{i0}+c_{0j}+\lambda c_{ij}}{c^{max}}\right] + \left[\mu \frac{\cos\theta_{ij}\left|c^{max}-(c_{i0}+c_{0j})/2\right|}{c^{max}}\right] + \left[\nu \frac{\left|\bar{d}-(d_i+d_j)/2\right|}{d^{max}}\right] \qquad (13)$$

где $d_i$ – спрос клиента $i$, $\bar{d}$ – средний спрос клиентов, $c_{ij}$ – расстояния между клиентами $i$ и $j$ и депо соответственно, λ – параметр формы маршрута, $\mu$ – параметр, введенный *Paessens*, ν – параметр, введенный *Altinel* и *Oncan*, $\theta$ – угол, образованный двумя лучами, исходящими из депо и пересекающими клиентов $i$ и $j$, $c^{max}$– наибольшее расстояние среди всех пар клиентов, $d^{max}$– максимальный спрос среди клиентов.

Основной целью является сравнительный анализ базового алгоритма Кларка-Райта и его окончательно модернизированной версии. В качестве среды для разработки алгоритма была выбрана профессиональная среда имитационного моделирования *AnyLogic*, основанная на языке программирования *Java*. Главным плюсом данного программного обеспечения является пользовательский интерфейс, позволяющий визуализировать результаты работы алгоритма.

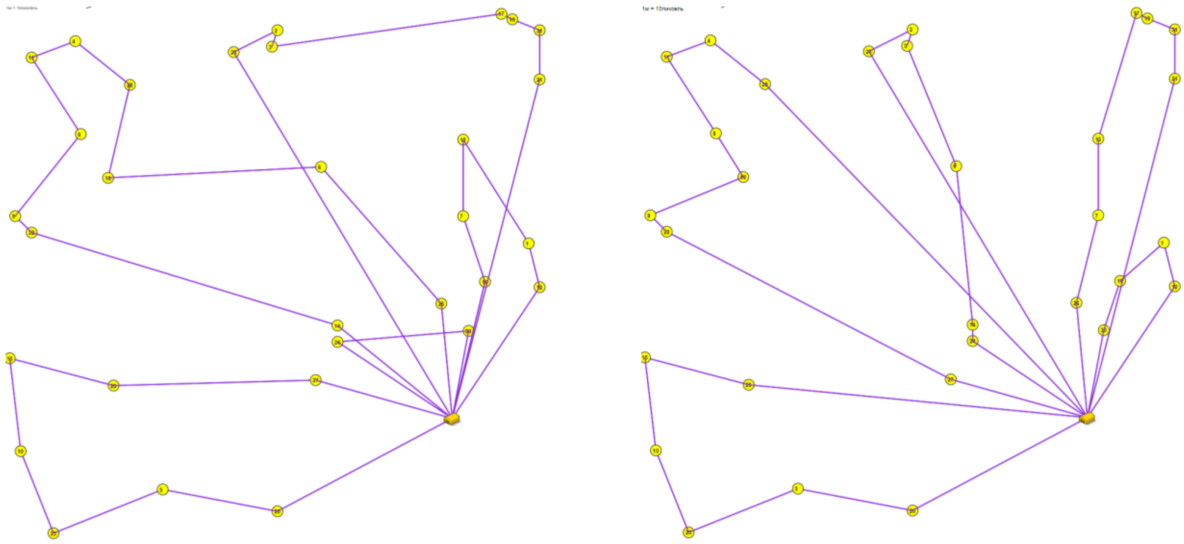
Тестирование производилось с использованием библиотеки *VRP*-примеров, разработанных *Augerat* в 1995 г. [6]. Для примеров данной библиотеки уже известны лучшие решения, что позволяет сделать полноценный анализ эффективности алгоритма. В частности, в качестве объекта исследования была взята карта *A-n32-k5*, для которой оптимальное решение составляет 784 у.е.

Поскольку метод Кларка-Райта является исключительно расчетным, то есть не стохастическим, достаточно одного прогона для объективной оценки результата. Для объективной оценки модернизированного алгоритма Кларка-Райта целесообразно проводить серию испытаний с несколькими прогонами, для поиска наиболее оптимального набора значений параметров λ, μ, ν. Для этого проводился эксперимент, целью которого, было поиск этих значений, в частности он, состоял из последовательного изменения всех 3 параметров:

- параметр λ изменялся от 0 до 5 с шагом 0,5;

- параметр $\mu$ также изменялся от 0 до 5 с шагом 0,5;
- исключение составляет параметр $\nu$ – он изменяется от - 0,1 до 0,1, в качестве шага была выбрана величина 0,02.

Визуализации решений представлены на рис. 1.



а) б)

**Рис. 1. Визуализация решения на карте *A-n54-k7:***
а – базовым алгоритмом; б – модернизированным алгоритмом

Для наглядного сравнения полученных результатов, они сведены в табл. 1.

***Таблица 1.***
**Сводная таблица полученных результатов на карте *A-n32-k5***

| **Метод** | **Результат** | **Отклонение от оптимального результата, у.е.** | **Отклонение от оптимального результата, %.** |
|---|---|---|---|
| Базовый | 843,68 | 100,68 | 13,55 |
| Модернизированный | 834,90 | 91,90 | 12,36 |

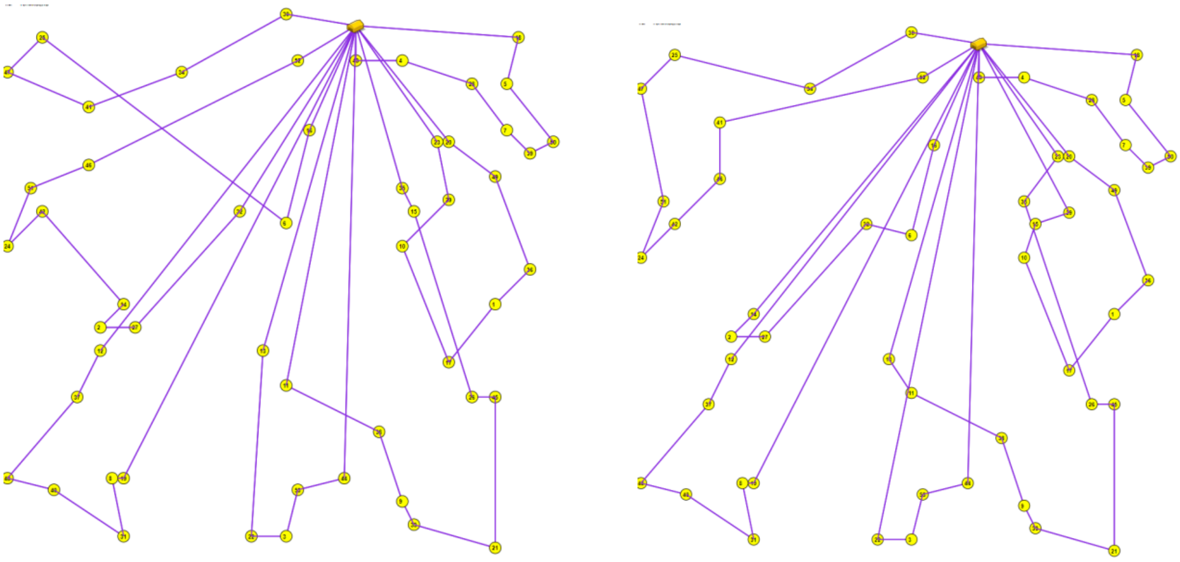
Исходя из результатов, приведенных в табл. 1, можно сделать однозначный вывод о том, что модернизированный алгоритм Кларка-Райта качественно превосходит базовый. Его «выигрыш» составляет 1,19 %.

Стоит отметить, что усовершенствованный метод показал такой результат на следующем наборе входных параметров-коэффициентов:

- параметр $\lambda = 1$;
- параметр $\mu = 0,5$;
- параметр $\nu$ в данном случае не имеет значения, поскольку результат в 834,90 у.е., был достигнут на всех значениях, участвующих в эксперименте (- 0.1, - 0.8, …, 0.8, 0.1).

В качестве второй карты для тестирования была выбрана карта *A-n54-k7* с оптимальным результатом 1167 у.е. Условия проведения эксперимента те же.

Графические решения представлены на рис. 2.



а) б)

**Рис. 2. Визуализация решения на карте *A-n54-k7:***
а – базовым алгоритмом; б – модернизированным алгоритмом

Результаты сведены в табл. 2.

*Таблица 2.*
**Сводная таблица полученных результатов на карте *A-n54-k7***

| Метод | Результат | Отклонение от оптимального результата, у.е. | Отклонение от оптимального результата, %. |
|---|---|---|---|
| Базовый | 1201,19 | 34,19 | 2,92 |
| Модернизированный | 1187,90 | 20,9 | 1,79 |

В данном случае улучшение составило 1,13 %. Лучший результат, найденный усовершенствованным методом, имеет расхождение с оптимальным в 1,79 %, что на 1,13 % лучше, чем найденный базовым методом. При этом набор значений параметров-коэффициентов – тот же, что и на предыдущей карте.

Из всего вышеизложенного, можно сделать однозначный вывод, что усовершенствования базового алгоритма дают положительный эффект. С его помощью найдены решения, превосходящие по качеству решения, найденные базовым методом. При этом следует вывод о наиболее оптимальном наборе значений параметров ($\lambda = 1$, $\mu = 0{,}5$), на рассмотренных картах, именно этот набор показал наилучшие результаты. Параметр $\nu$ не является существенной переменной, влияющей на результат, поскольку при разных значениях этого параметра, результат был одинаковым.

Стоит отметить, что эти выводы справедливы для библиотеки примеров, разработанных *Augerat, P.* (*Set A*) [6], на которых проходило тестирование, их особенностью является расположение клиентов, а именно, расположение депо в центре или вблизи основной группы клиентов. Тестирование на других картах из других библиотек, с другим расположением клиентов, и оценка предварительно найденных оптимальных параметров, будет целью следующих работ.

### *Библиографический список*

1. Dantzig, G.B. The truck dispatching problem / G.B Dantzig., J.H. Ramser // Management science. 1959. V. 6. №. 1. Pp. 80-91.
2. Gaskell, T.J. Bases for Vehicle Fleet Scheduling. [Электронный ресурс] URL: https://www.semanticscholar.org/paper/Bases-for-Vehicle-Fleet-Scheduling-Gaskell/6aafd46824a21b000a12741bcd953ea8ce302b4a. (дата обращения 27.12.2021).
3. Paessens, H. Fachhochschule Flensburg, Fachgebiet Wirtschaft, D-2390. Flensburg, Germany, Fed. Rep. C. 333. [Электронный ресурс] URL:https://www.fahrschulen.de/Fahrschule-Flensburg/ (дата обращения 27.12.2021).
4. A new enhancement of the Clarke and Wright savings heuristic for the capacitated vehicle routing problem. [Электронный ресурс] URL: https://ideas.repec.org/a/pal/jorsoc/v56y2005i8d10.1057_palgrave.jors. 2601916.html (дата обращения 27.12.2021).
5. Journal of the Operational Research Society (2011) 62. [Электронный ресурс] URL:https://www.researchgate.net/journal/Journal-of-the-Operational-Research-Society-0160-5682 doi:10.1057/jors.2009.176 (дата обращения 29.12.2021).
6. Augerat, P., Belenguer, J., Benavent, E., Corber´an, A., Naddef, D., Rinaldi, G., 1995. Computational results with a branch and cut code for the capacitated vehicle routingproblem. [Электронный ресурс] URL:http://www.iasi.cnr.it/new/publications.php/id_p/2/anno/0/id_autore/0/id_tipologia/6/rep/3161 (дата обращения 28.12.2021).