УДК 539.3 *DOI:10.46960/62045_2020_4_54*

О.А. Сергеев[1], В.Г. Киселев[1], С.А. Сергеева[2]

ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УСТАЛОСТНУЮ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

[1]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия

[2]Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

Рассмотрен метод определения размеров поперечных сечений и координат узлов стержневой конструкции, соответствующих ее минимальному весу. Приняты в расчет ограничения на уровень усталостной долговечности (многоцикловой) конструкции с возможностью связывания размеров поперечных сечений и координат узлов в типы и группы. Предполагается, что материал конструкции линейно упругий, и на нее действуют полигармонические постоянные нагрузки. Эффективность предлагаемого метода продемонстрирована на примерах оптимального проектирования шарнирно опертой балки, плоской рамы, пятидесятидвухэлементной пространственной рамы. Полученные в *Ansys* результаты хорошо согласуются с результатами, полученными в среде *Mathematica*.

Ключевые слова: оптимизация, анализ чувствительности, стержневые конструкции, многоцикловое полигармоническое нагружение, усталостная долговечность.

Введение

Одной из важных инженерных задач является увеличение долговечности конструкций при снижении их веса. При этом задача оптимизации конструкций с учетом ограничений на усталостную долговечность остается малоизученной областью, и данное направление требует дальнейших исследований. Большой интерес представляют пространственные стержневые конструкции, находящиеся под действием нестационарного полигармонического нагружения.

В условиях динамического или циклического нагружения может возникнуть усталостное разрушение конструкции при уровнях напряжений, которые значительно ниже, чем предел текучести или предел прочности материала. Такие поломки приводят к катастрофическим результатам, поскольку возникают внезапно, без предварительного предупреждения [1,2]. При числе циклов нагружения $10^2 \div 10^4$ (малоцикловая усталость) появляется сетка трещин и заметные пластические деформации. При числе циклов нагружения больше 10^5 (многоцикловая усталость) наблюдается усталостное разрушение без заметных следов пластических деформаций [1,3-5]. В настоящей работе рассматривается многоцикловая усталость.

Проектирование стержневых конструкций, подвергающихся циклической нагрузке, включает в себя понятия среднего и амплитудного напряжений в асимметричном цикле, а также предела выносливости. Среднее напряжение взято от максимального и минимального значений напряжений в одном цикле. Амплитудное напряжение составляет половину диапазона напряжений в одном цикле, или полуразность между максимальным и минимальным напряжениями в цикле. Для большинства материалов существует предел выносливости или наибольшее напряжение цикла, которое может выдержать элемент конструкции без разрушения, причем считается, что элементы с уровнем напряжений ниже этого предела имеют бесконечную усталостную долговечность. Для описания перехода от асимметричного к симметричному циклу нагружения могут использоваться ряд зависимостей, связывающих при-

веденную амплитуду напряжения симметричного цикла нагружения с амплитудным и средним напряжениями асимметричного цикла: зависимость Серенсена-Кинасошвили, зависимость Гудмана, зависимость Гербера, зависимость Зодерберга, зависимость Сайнса.

В анализе многоцикловой усталости (когда циклическая нагрузка является упругой и количество циклов до разрушения велико) широко используются кривая Велера (S–N) или кривая, связывающая переменное напряжение с количеством циклов до разрушения и характеризующая способность материала сопротивляться многоцикловому нагружению. Для оценки поврежденности конструкции в процессе многоцикловой усталости используется правило линейного накопления усталостных повреждений [1,4,5]. Учет длительного действия динамических нагрузок малой интенсивности, приводящих к возникновению трещин в результате усталостной долговечности, актуален при решении задач оптимизации [2,3,6,7].

В данной работе рассматривается задача оптимизации по весу стержневых конструкций при ограничениях на усталостную долговечность конструкции, размеры или площади поперечных сечений стержней, координаты узлов. С целью соблюдения конструктивных требований они объединяются в типы и группы. Конструкция находится под действием полигармонических сил, моментов и постоянной нагрузки, ее материал считается линейно упругим. Предлагается методика определения экстремальной усталостной долговечности в объеме элемента и анализ чувствительности экстремальной усталостной долговечности.

Объект исследования

Объект исследования – пространственная стержневая (рамная) конструкция, состоящая из прямолинейных призматических стержней (соединение стержней в узлах конструкции считается жестким). Опорные узлы конструкции закрепляются от линейных и/или угловых перемещений. Под действием внешнего нагружения в стержнях наблюдаются следующие виды деформаций: растяжение-сжатие, изгиб, срез, кручение. Перемещения узлов конструкции (линейные и угловые) считаются малыми, а материал стержней конструкции – однородным. Характеристики нагруженности и прочности, сопротивления усталости считаются детерминированными (неслучайными) величинами.

В работе рассмотрено многоцикловое, т.е., такое нагружение (гармонические узловые силы и моменты), при котором деформации во времени каждого цикла являются упругими. Инерционные эффекты в работе не учитываются, деформации конструкции успевают отслеживать изменение нагрузки или, как говорят, нагрузки действуют в квазистатическом приближении. В работе предполагается, что резкие всплески перегрузок отсутствуют. Максимальные напряжения не превышают допустимых напряжений при действующих нагрузках. В качестве целевой функции рассматривается вес стержневой конструкции, который необходимо минимизировать. Варьируемыми параметрами при проектировании являются размеры или площади поперечных сечений стержней, координаты узлов стержневой конструкции. Допустимая область в задаче оптимизации определяется ограничениями на уровень усталостной долговечности конструкции и ограничениями на предельные значения варьируемых параметров. Ограничения по прочности в данном исследовании являются слабыми ограничениями, поскольку переменное многоцикловое нагружение сопровождается накоплением усталостных повреждений при более низком уровне нагрузки, чем уровень нагрузки, при котором происходит нарушение ограничений по прочности.

Анализ напряженно-деформированного состояния

Вектор узловых перемещений определяется из системы линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\}=\{P\}, \qquad (1)$$

где $[K]$– матрица жесткости рамы, $\{U\}$– вектор узловых перемещений, $\{P\}$– вектор узловых нагрузок.

Рассмотрим узловые стационарные и полигармонические нагрузки, при которых деформация во времени каждого цикла упруга (многоцикловое нагружение). Полигармоническое нагружение является распространенным видом. Полный вектор внешних узловых нагрузок записывается в виде:

$$\{P\}=\{P^o\}+\sum_{i=1}^{n}\left(\{P^{c_i}\}\cos\omega_i t+\{P^{s_i}\}\sin\omega_i t\right), \tag{2}$$

где $\{P^o\}$ – вектор узловых стационарных нагрузок,

$\{P^{c_i}\}$, $\{P^{s_i}\}$ – векторы коэффициентов узловых нагрузок при $\cos\omega_i t$, $\sin\omega_i t$,

ω_i – круговые частоты составляющих гармоник полигармонического нагружения,

n – количество круговых частот полигармонического нагружения [2].

Решение системы (1) при внешней нагрузке (2) определяется как

$$\{U\}=\{U^0\}+\sum_{i=1}^{n}\left(\{U^{c_i}\}\cos\omega_i t+\{U^{s_i}\}\sin\omega_i t\right), \tag{3}$$

где коэффициенты $\{U^0\}, \{U^{c_i}\}, \{U^{s_i}\}$ являются решениями системы $2n+1$ линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}[K]\{U^0\}=\{P^0\},\\ [K]\{U^{c_i}\}=\{P^{c_i}\},\ i=\overline{1,n}\\ [K]\{U^{s_i}\}=\{P^{s_i}\}\end{cases} \tag{4}$$

Каждая компонента σ_{kl} тензора напряжений в каждой точке стержневого элемента в условиях квазистатики будет иметь вид:

$$\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^0+\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_{kl}^{c_i}\cos\omega_i t+\sigma_{kl}^{s_i}\sin\omega_i t\right) \tag{5}$$

Составляющие тензора напряжений σ_{kl}^0, $\sigma_{kl}^{c_i}$, $\sigma_{kl}^{s_i}$ определяются как решения $2n+1$ статических задач при нагрузках $\{P^0\}$, $\{P^{c_i}\}$, $\{P^{s_i}\}$ соответственно.

Средние и амплитудные значения напряжений определяются с использованием гипотезы линейного накопления усталостных повреждений. Среднее напряжение представляет собой среднее из максимального и минимального напряжений за один цикл, т.е., $\sigma_m=(\sigma_{max}+\sigma_{min})/2$ (рис. 1). Амплитудное напряжение $\sigma_a=(\sigma_{max}-\sigma_{min})/2$ составляет половину диапазона напряжений в одном цикле.

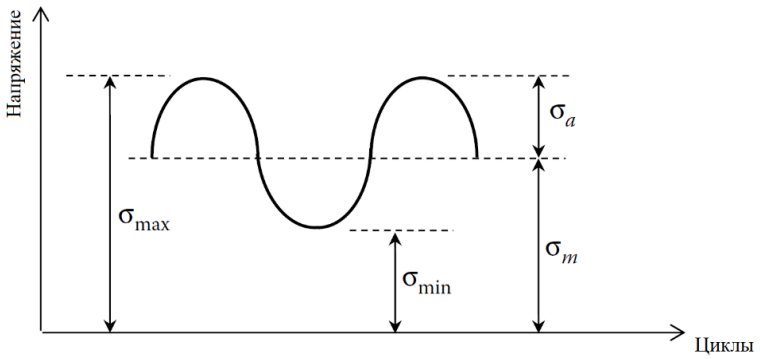

Рис. 1. Цикл усталостного напряжения

Модель усталостной долговечности

Усталостная долговечность конструкции – число блоков нагружения λ до появления усталостной трещины в любой точке конструкции, причем образование усталостной трещины в любой точке является признаком нарушения работоспособности конструкции. Для заданного вектора управляемых параметров $\{X\}$ нахождение усталостной долговечности λ стержневой конструкции сводится к определению элемента и точки в объеме этого элемента, для которых усталостная долговечность будет минимальна:

$$\lambda(\{X\}) = \min_{e} \min_{V_e} \lambda_e(x_1, y_1, z_1, \{X\}) \tag{6}$$

Для заданного набора управляемых параметров $\{X\}$ усталостная долговечность $\lambda_e(x_1, y_1, z_1, \{X\})$ в произвольной точке элемента конструкции, выполненной из материалов типа сталей, усталостная кривая которых имеет правый горизонтальный участок, определяется числом блоков нагружения до появления усталостной трещины:

$$\lambda_e(x_1, y_1, z_1, \{X\}) = \frac{\sigma_{-1D}^m N_0}{\nu_b \sum\limits_{\left(\sigma_{ai}^{\text{ПР}} \geq \sigma_{-1D}\right)} \left(\sigma_{ai}^{\text{ПР}}\right)^m \left(\nu_{ib}/\nu_b\right)}, \tag{7}$$

где σ_{-1D} – предел выносливости,

$m,\ N_0$ – параметры уравнения кривой усталости,

ν_{ib} – число циклов повторения амплитуды $\sigma_{ai}^{\text{ПР}}$ в блоке нагружения для точки элемента,

ν_b – общее число циклов в блоке нагружения для точки элемента конструкции.

Блок нагружения – последовательность переменных напряжений в любой точке конструкции за характерный период ее эксплуатации.

Уравнение кривой усталости (кривой Велера) для углеродистых и среднелегированных сталей имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\sigma_{ai}^{\text{ПР}}\right)^m N_i = \sigma_{-1D}^m N_0 & \text{при} \quad \sigma_{ai}^{\text{ПР}} \geq \sigma_{-1D}, \\ N_i = \infty & \text{при} \quad \sigma_{ai}^{\text{ПР}} < \sigma_{-1D}, \end{cases} \tag{8}$$

$\sigma_{ai}^{\text{ПР}}$ – приведенная (эквивалентная) амплитуда рабочих напряжений i-го уровня, полученная путем ступенчатой аппроксимации функции распределения амплитуд в точке (x_1, y_1, z_1) e-го элемента пространственной рамной конструкции для заданного вектора $\{X\}$ управляемых параметров.

Переход от ассимметричного цикла нагружения к эквивалентному симметричному производится согласно зависимости Серенсена-Кинасашвили:

$$\sigma_{ai}^{\text{ПР}} = \begin{cases} \sigma_{ai} + \psi_\sigma \sigma_{mi} & \text{при} \quad \sigma_{mi} > 0, \\ \sigma_{ai} & \text{при} \quad \sigma_{mi} \leq 0, \end{cases} \tag{9}$$

где ψ_σ – коэффициент чувствительности материала элемента конструкции к асимметрии цикла нагружения, σ_{ai}, σ_{mi} – амплитудное и среднее значения напряжений i-го асимметричного цикла в точке элемента конструкции, N_i – число циклов до разрушения по кривой усталости, соответствующее приведенной амплитуде $\sigma_{ai}^{\text{ПР}}$ в произвольной точке.

Если в точке элемента стержневой конструкции действуют одновременно нормальные и касательные напряжения, которые изменяются по полигармоническому закону, то

нахождение усталостной долговечности $\lambda_e(x_1,y_1,z_1,\{X\})$ базируется на критерии прочности при плоском напряженном состоянии в виде эллиптической зависимости:

$$\lambda_e(x_1,y_1,z_1,\{X\}) = \frac{\lambda_e^{\sigma}(x_1,y_1,z_1,\{X\})\,\lambda_e^{\tau}(x_1,y_1,z_1,\{X\})}{\left(\left(\lambda_e^{\sigma}(x_1,y_1,z_1,\{X\})\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\lambda_e^{\tau}(x_1,y_1,z_1,\{X\})\right)^{\frac{2}{m}}\right)^{\frac{m}{2}}}, \quad (10)$$

где $\lambda_e^{\sigma}(x_1,y_1,z_1,\{X\})$, $\lambda_e^{\tau}(x_1,y_1,z_1,\{X\})$ – усталостная долговечность в точке элемента стержневой конструкции для заданного набора управляемых параметров $\{X\}$, найденная при условии, что в ней возникают только нормальные, касательные напряжения соответственно.

Анализ чувствительности усталостной долговечности

В качестве управляемых параметров рассматриваются размеры или площади поперечных сечений, координаты узлов конструкции. Производные целевой функции и функций ограничений по варьируемым параметрам представляют собой необходимую информацию для градиентных методов оптимизации. Порядок величин производных говорит о том, какие варьируемые параметры имеют сильное влияние на целевую функцию, функции ограничений, а какие – слабое влияние.

Функция ограничений, характеризующая усталостную долговечность в точке конструкции, может быть записана следующим образом:

$$g(x,y,z,\{X\}) = 1 - \lambda(x,y,z,\{X\})/\lambda_0, \quad (11)$$

где $\lambda(x,y,z,\{X\})$ – усталостная долговечность в произвольной точке конструкции для заданного вектора управляемых параметров $\{X\}$, λ_0 – допустимая наработка конструкции.

Ограничение (11) можно представить несколькими ограничениями по количеству элементов конструкции:

$$g_e^{max} = \max_{x_1,y_1,z_1 \in V_e} g_e(x_1,y_1,z_1,\{X\}) = 1 - \lambda_e^{min}(x_1,y_1,z_1,\{X\})/\lambda_0, \quad e = \overline{1,k}, \quad (12)$$

где $\lambda_e^{min}(x_1,y_1,z_1,\{X\})$ – минимальное значение усталостной долговечности в объеме элемента.

Дифференцируя (12) по варьируемым параметрам, получим вектор производных функции ограничений по усталостной долговечности:

$$\left\{\frac{dg_e^{max}}{dX}\right\} = -\frac{1}{\lambda_0}\left\{\frac{d\lambda_e^{min}}{dX}\right\}, \quad (13)$$

где $\left\{\frac{d\lambda_e^{\min}}{dX}\right\}$ – вектор производных усталостной долговечности $\lambda_e^{\min}$ пространственного рамного элемента по управляемым параметрам. В работе рассмотрены два подхода к получению производных $\left\{\frac{d\lambda_e^{\min}}{dX}\right\}$.

Первый подход использует конечные разности для нахождения производной (13):

$$\frac{\partial\lambda_e^{min}}{\partial X_j} \approx \frac{\lambda_e^{min}(X_1,\dots,X_j+\Delta X_j,\dots,X_m) - \lambda_e^{min}(X_1,\dots,X_j,\dots,X_m)}{\Delta X_j}, \quad j = \overline{1,m}, \quad e = \overline{1,k} \quad (14)$$

Для определения величины $\lambda_e^{min}(X_1,\dots,X_j+\Delta X_j,\dots,X_m)$ требуется пересчет усталостной долговечности элементов конструкции при измененном управляемом параметре

$X_j + \Delta X_j$. Для определения m производных требуется $m+1$ пересчетов всей конструкции. Этот подход является достаточно трудоемким в плане затрат машинного времени.

Минимальное значение усталостной долговечности элемента определяется значением усталостной долговечности в точке минимума по объему элемента следующим образом

$$\min_{V_e} \lambda_e = \lambda_e^{min} = \lambda_e\left(x_1^*(\{X\}), y_1^*(\{X\}), z_1^*(\{X\}), \{X\}\right), \tag{15}$$

где x_1^*, y_1^*, z_1^* – координаты точки минимума, зависящие в общем случае от варьируемых параметров $\{X\}$.

Дифференцируя (15) по варьируемым параметрам $\{X\}$, согласно второму подходу можно получить

$$\left\{\frac{d\lambda_e^{min}}{dX}\right\} = \left\{\frac{\partial \lambda_e}{\partial X}\right\} + \frac{\partial \lambda_e}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial x_1^*}{\partial X}\right\} + \frac{\partial \lambda_e}{\partial y_1}\left\{\frac{\partial y_1^*}{\partial X}\right\} + \frac{\partial \lambda_e}{\partial z_1}\left\{\frac{\partial z_1^*}{\partial X}\right\} \tag{16}$$

Данный подход, названный подходом с дифференцированием координат точки минимума, требует дальнейшей разработки для определения частных производных $\left\{\frac{\partial x_1^*}{\partial X}\right\}$, $\left\{\frac{\partial y_1^*}{\partial X}\right\}$, $\left\{\frac{\partial z_1^*}{\partial X}\right\}$ и скорее применим для простых моделей определения усталостной долговечности и простых элементов конструкции.

Постановка задачи оптимизации

Задача оптимального проектирования по весу стержневой конструкции может быть сформулирована как задача нелинейного условного математического программирования. Требуется найти такие значения варьируемых параметров из области допустимых значений, для которых вес конструкции будет минимальным:

$$W\left(\{X^*\}\right) = \min_{\{X\} \in F} \sum_{e=1}^{k} \rho_e A_e(\{X\}) L_e(\{X\}), \tag{17}$$

где ρ_e, a_e и L_e – плотность, площадь и длина е-го элемента.

Область допустимых значений определяется ограничениями на усталостную долговечность конструкции и ограничениями на предельные значения варьируемых параметров:

$$F = \{\ \{X\}: \lambda_e(x_1, y_1, z_1, \{X\}) \geq \lambda_0,\ e = \overline{1,k},$$

$$\{X\}_{min} \leq \{X\} \leq \{X\}_{max}\}, \tag{18}$$

где $\lambda_e(x_1, y_1, z_1, \{X\})$ – усталостная долговечность в объеме элемента конструкции, λ_0 – допустимая рабочая наработка конструкции, $\{X\}_{min}$, $\{X\}_{max}$ – нижние и верхние пределы на варьируемые параметры.

Общая задача нелинейного программирования эффективно решатся с помощью аппроксимации задачи.

Аппроксимация задачи оптимизации

$$\underset{\{X\} \in \tilde{F}}{\textbf{Minimize}} \left(\Delta W = \nabla^T W(\{X\})\ \{\Delta X\} + \frac{1}{2}\{\Delta X\}^T [H] \{\Delta X\}\right), \tag{19}$$

где матрица Гессе имеет вид:

$$[H]=\left[\frac{\partial^2 W}{\partial X_i\,\partial X_j}\right]=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial X_1\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial X_1\partial X_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 W}{\partial X_m\partial X_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial X_m\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 W}{\partial X_m^2} \end{bmatrix},$$

$$\nabla^T=\left\{\frac{\partial}{\partial X_1},\frac{\partial}{\partial X_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial X_m}\right\}.$$

Допустимая область $\widetilde{F}$ определяется линейными аппроксимациями активных ограничений:

$$\lambda_e(\{X\})+\nabla^T\lambda_e(\{X\})\{\Delta X\}\geq\lambda_0, \tag{20}$$

где матрица градиентов $[\nabla^T\lambda_e]$ определяется производными экстремальной усталостной долговечности $\frac{d}{dX_i}(\min\limits_{V_e}\lambda_e)$.

$$\{\Delta X\}_{min}\leq\{\Delta X\}\leq\{\Delta X\}_{max},$$
$$\{\Delta X\}_{max}=\frac{\{X\}_{max}-\{X\}_{min}}{10},\ \{\Delta X\}_{min}=-\{\Delta X\}_{max} \tag{21}$$

Критерием останова многошагового процесса проектирования служит стабилизация веса рамы:

$$\left|W(\{X_{k+1}\})-W(\{X_k\})\right|/W(\{X_k\})\leq\delta, \tag{22}$$

где δ = 0,001.

Примеры

*Пример 1: шарнирно опертая балка***.** Рассмотрим шарнирно опертую балку (рис. 2) под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности *q*, изменяющейся по гармоническому закону $q=q_a\sin\omega t$, где $q_a=1000\frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Материал конструкции – сталь: модуль упругости E=200 ГПа, плотность $\rho=7799\frac{кг}{м^3}$. Предел выносливости $\sigma_{-1D}=0.1$ ГПа, параметры кривой Велера: базовое число циклов нагружения (абсцисса точки перегиба на кривой Велера) $N_0=2\cdot10^6$, показатель наклона первого участка кривой усталости $m=9.75$. В качестве блока нагружения рассмотрим один период гармоники $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Допустимая рабочая наработка конструкции $\lambda_0=10^5$ циклов нагружения. Длина балки $L=1м.$ В качестве варьируемых параметров проектирования рассматриваются ширина и высота прямоугольного поперечного сечения шарнирно опертой балки.

Оптимальное решение было получено численно в *Ansys* и *Mathematica*. На рис. 2 (графическое решение задачи) показана область поиска, заключенная между линиями ограничений по размерам прямоугольного поперечного сечения; зеленым цветом показаны линии уровня целевой функции (вес балки), красным − линия уровня ограничения по усталостной долговечности, голубым – линия уровня ограничения по прочности, желтым цветом отмечена область допустимых значений. Оптимальная точка лежит на границе допустимой области и в плоскости варьируемых параметров определяется координатами $W=10мм$, $H=23.713мм$, оптимальный вес балки равен 18.142 Н.

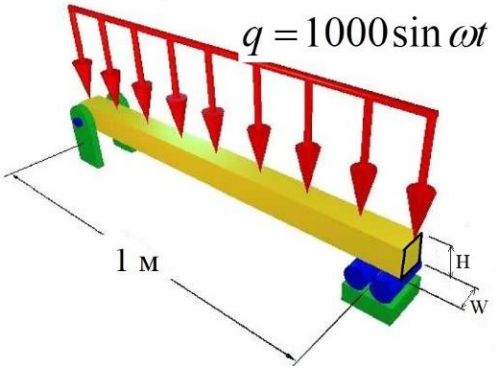

Рис. 2. Шарнирно опертая балка

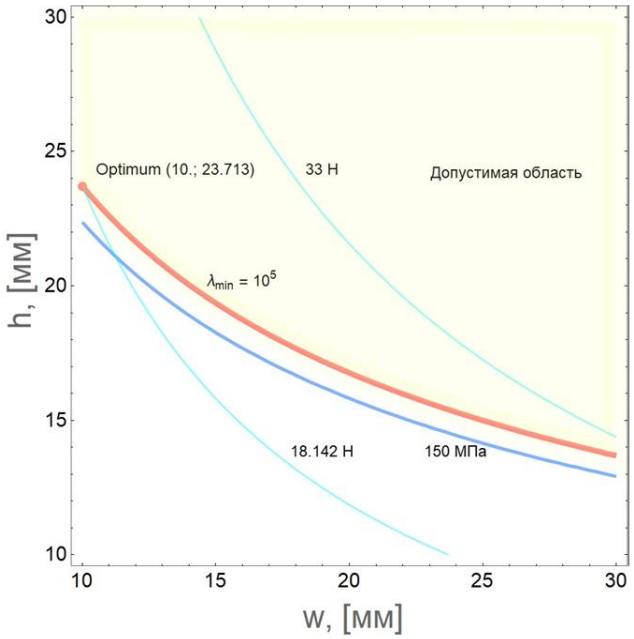

Рис. 3. Графическое решение задачи

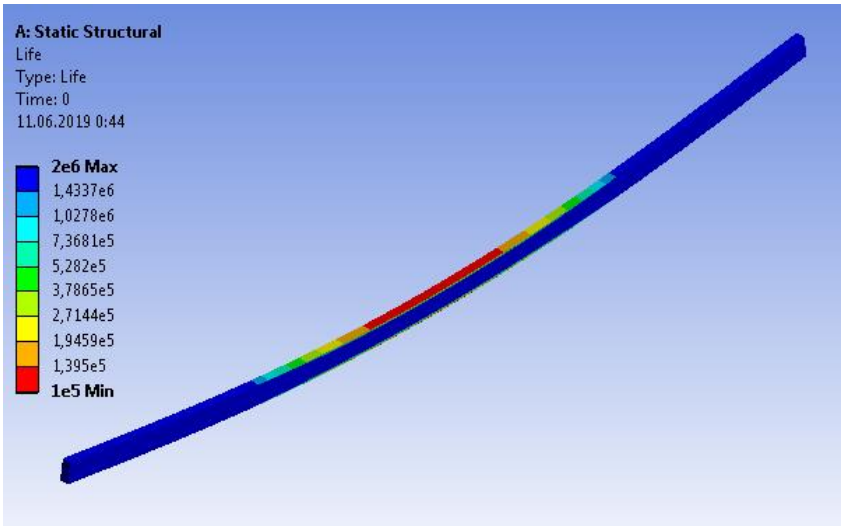

Рис. 4. Распределение усталостной долговечности

Цветовая палитра в левой части рис. 4 задает соответствие цветов различным интервалам уровней усталостной долговечности. Значения усталостной долговечности даны в циклах. В табл. 1 представлено сравнение численных результатов, полученных в *Ansys* и *Mathematica*. Результаты хорошо согласуются.

Таблица 1.

Начальный и оптимальный проекты для шарнирно опертой балки

Варьируемые параметры	**Начальные варьируемые параметры**	**Оптимальные варьируемые параметры**	
		ANSYS	***MATHEMATICA***
W, мм	20	10	10
H, мм	20	23,739	23,713
Fatigue Life, циклы	$3{,}112*10^6$	$0{,}102*10^6$	10^5
Вес, Н	**Начальный**	**Оптимальный**	
	30,603	18,162	18,142

*Пример 2: плоская рама***.** Рассмотрим рамную конструкцию (рис. 5), состоящую из стержней кольцевых поперечных сечений, внутренние диаметры которых $d_1 = d_2 = d = 60\,мм$. Длина стержней $L = 1\,м$. На конструкцию в узле 2 действует гармонический момент $M(t) = M_0 + M_1 \sin \omega t$, $M_0 = M_1$=1814.85 Н*м, $\omega = 200$ Гц. Узлы 2 и 3 имеют одну степень свободы – могут поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Независимыми переменными проектирования являются толщины поперечных сечений t_1, t_2, где $1.5 \le t_1 \le 5.5$, $1.5 \le t_2 \le 5.5$ (мм). Параметры материала рамы: E=200 ГПа, G=80 ГПа, ρ=7799 кг/м^3, допустимая рабочая наработка конструкции 10^5 циклов.

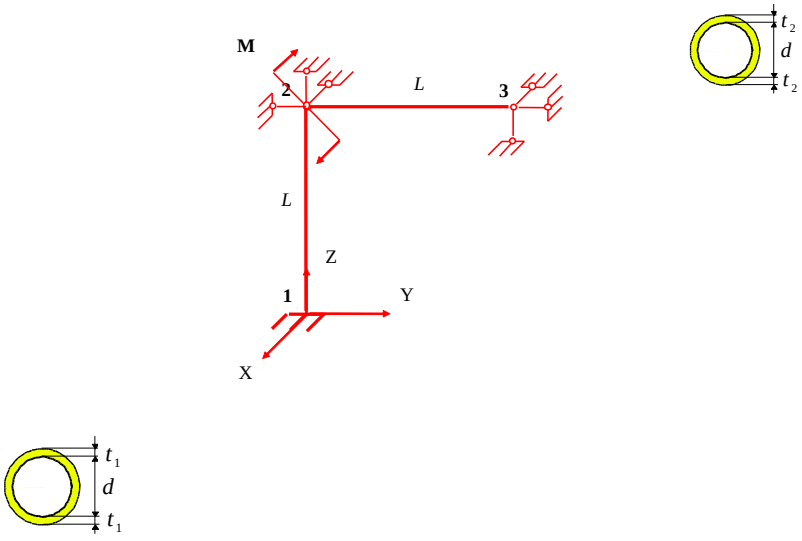

Рис. 5. КЭ модель плоской рамы

На рис. 6 представлено графическое решение задачи оптимизации, полученное в системе *Mathematica*. Оптимальное решение было получено также с использованием системы *Ansys*. На рис. 7-9 показаны графики зависимостей варьируемых параметров (толщины кольцевых поперечных сечений), приведенных напряжений элементов, усталостных долговечностей элементов от числа итераций. На рис. 10 представлен график зависимости целевой функции (вес рамы) от числа итераций.

Значения варьируемых параметров для начального и оптимального проектов плоской рамы представлены в табл. 2.

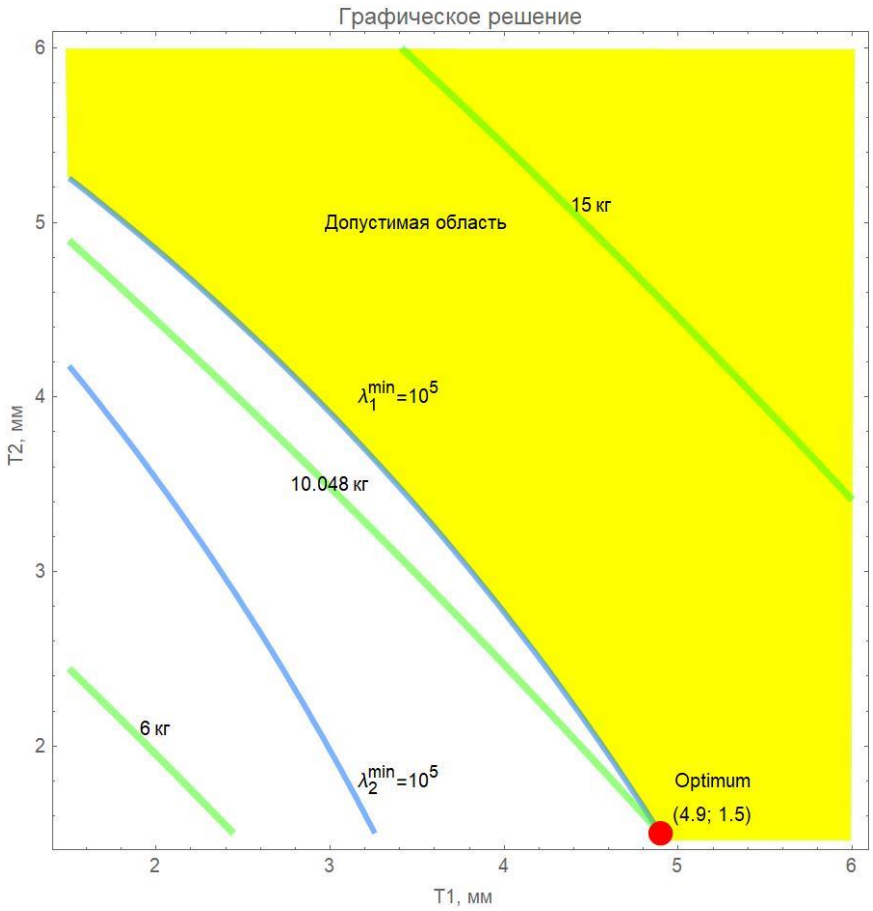

Рис. 6. Графическое решение задачи

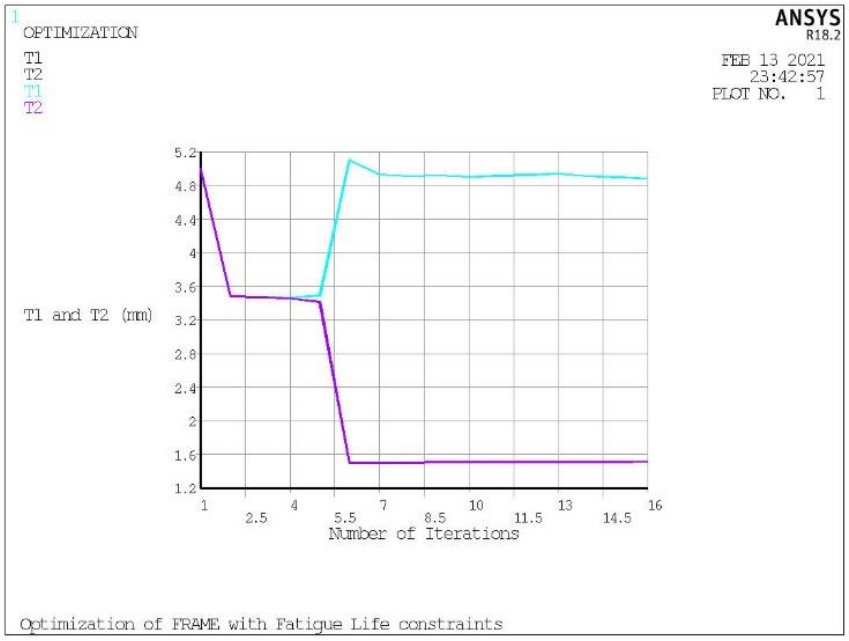

Рис. 7. Графики зависимостей варьируемых параметров от числа итераций. Толщины

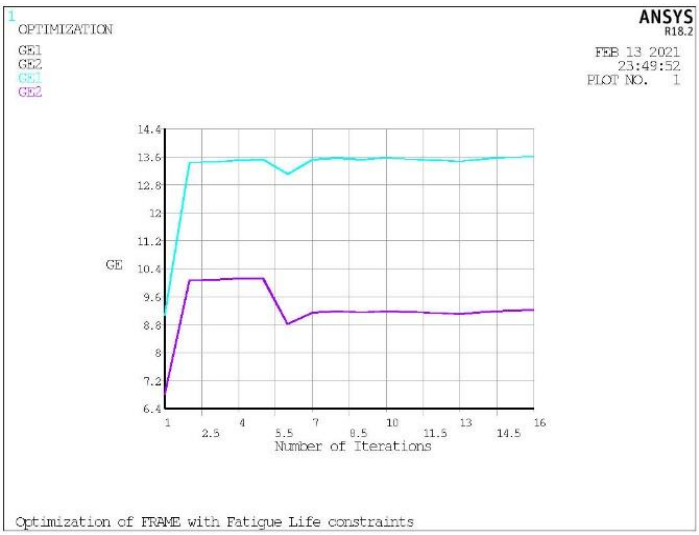

Рис. 8. Графики зависимостей приведенных напряжений элементов от числа итераций

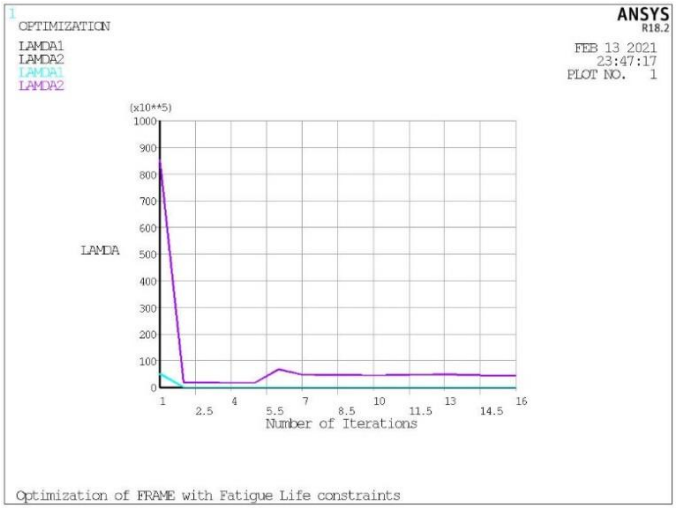

Рис. 9. Графики зависимостей усталостной долговечности элементов от числа итераций

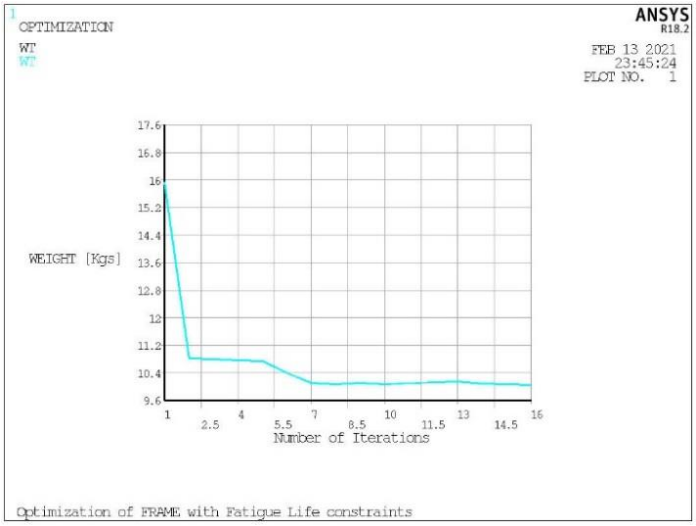

Рис. 10. График зависимости целевой функции от числа итераций

Таблица 2.
Начальный и оптимальный проекты плоской рамы

Варьируемые параметры	Начальные варьируемые параметры	Оптимальные варьируемые параметры	
		ANSYS	**MATHEMATICA**
t_1, мм	5	4,896	4,898
t_2, мм	5	1,513	1,5
Fatigue Life, циклы	$0{,}517*10^7$ $8{,}539*10^7$	$1{,}043*10^5$ $46{,}823*10^5$	10^5 10^5
Вес, кГс	**Начальный**	**Оптимальный**	
	15,926	10,065	10,048

*Пример 3: пятидесятидвухэлементная пространственная рама***.** На рис. 11-12 представлена пространственная рама, которая состоит из 52 элементов (начальная КЭ модель). Конструкция является симметричной. Опорные узлы рамы лежат на окружности радиусом 15 м, высота рамы 11 м. В качестве варьируемых параметров рассматриваются толщины $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8$ кольцевых поперечных сечений элементов, объединенные в 8 типов. Внутренний диаметр кольцевых поперечных сечений элементов равен 86 мм. Узловые координаты, связанны между собой в 5 групп Z_1, X_2, Z_2, X_6, Z_6, чтобы сохранить симметрию рамы. Материал конструкции – сталь: модуль Юнга *E*=200 ГПа, плотность $\rho = 7799\ \frac{кг}{м^3}$. Предел выносливости $\sigma_{-1D} = 0.1$ ГПа, параметры кривой Велера: базовое число циклов нагружения (абсцисса точки перегиба на кривой Велера) $N_0 = 2 \cdot 10^6$, показатель наклона первого участка кривой усталости $m = 9.75$. Вертикальная симметричная циклическая нагрузка $P = P_a \sin \omega t,\ P_a = 632745$ Н приложена в вершине рамы. Допустимая рабочая наработка конструкции $\lambda_0 = 10^5$ циклов нагружения.

Оптимальное решение было получено с использованием системы *Ansys*. Начальный и оптимальный проекты рамы (вид сверху, изометрический вид) показаны на рис. 13-16. На рис. 17 представлен график зависимости целевой функции (вес рамы) от числа итераций. На рис. 18-23 показаны графики зависимостей усталостной долговечности элементов, приведенных напряжений элементов, варьируемых параметров (толщины кольцевых поперечных сечений и координаты узлов) от числа итераций.

Значения варьируемых параметров для начального и оптимального проектов пространственной рамы представлены в табл. 3. Вес рамы стал меньше в 9,2 раза по сравнению с весом начального проекта. Оптимальный вес пространственной рамы – 2890,1 Н.

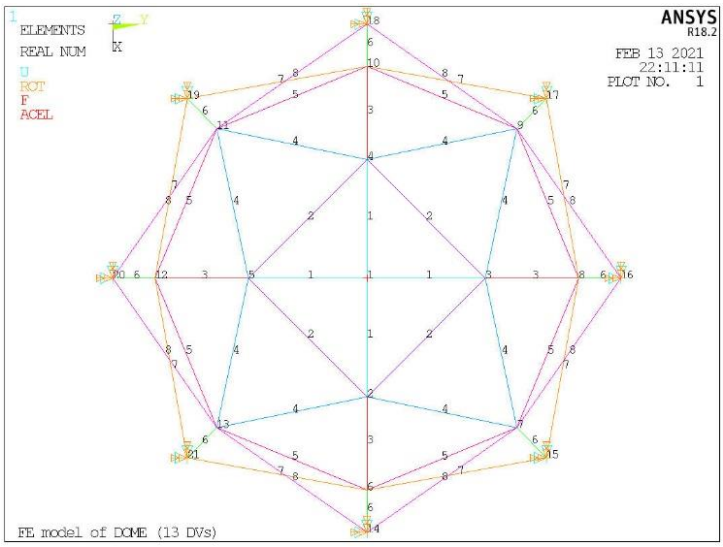

Рис. 11. Начальная КЭ модель. Вид сверху

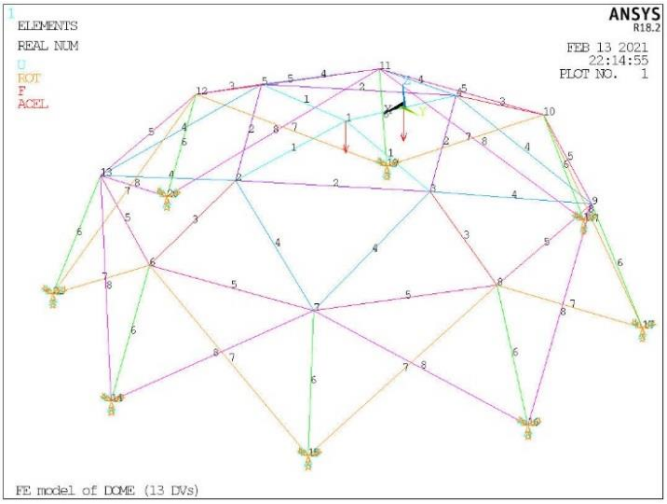

Рис. 12. Начальная КЭ модель. Изометрический вид

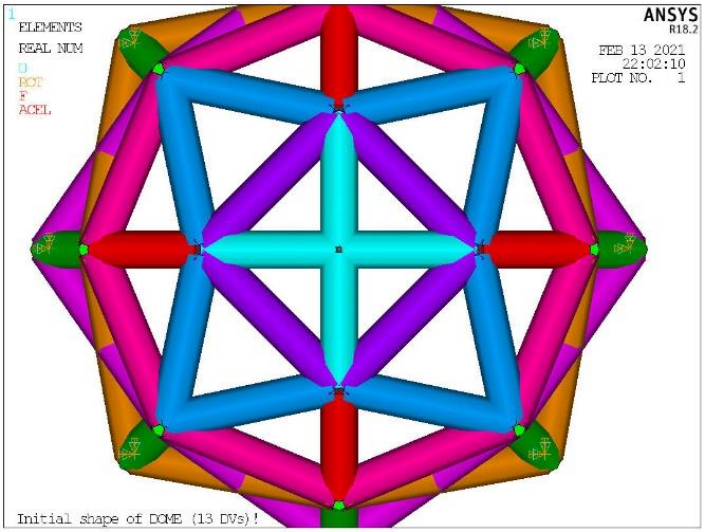

Рис. 13. Начальный проект. Вид сверху

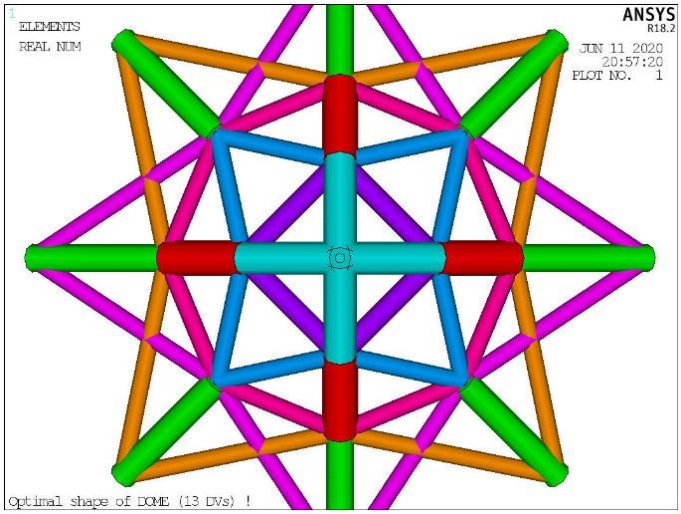

Рис. 14. Оптимальный проект. Вид сверху

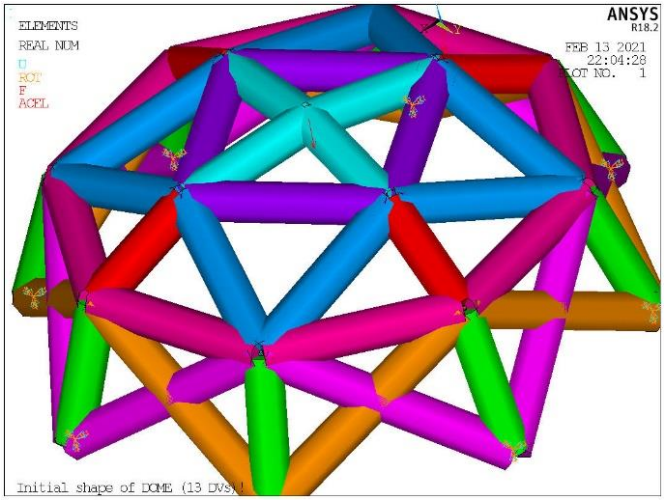

Рис. 15. Начальный проект. Изометрический вид

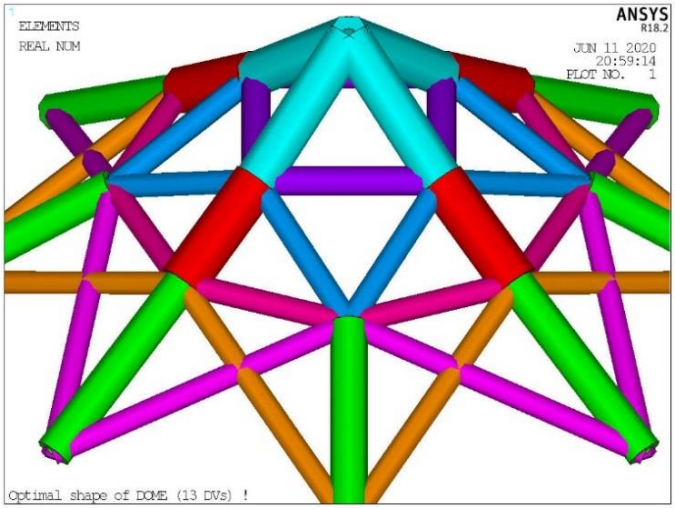

Рис. 16. Оптимальный проект. Изометрический вид

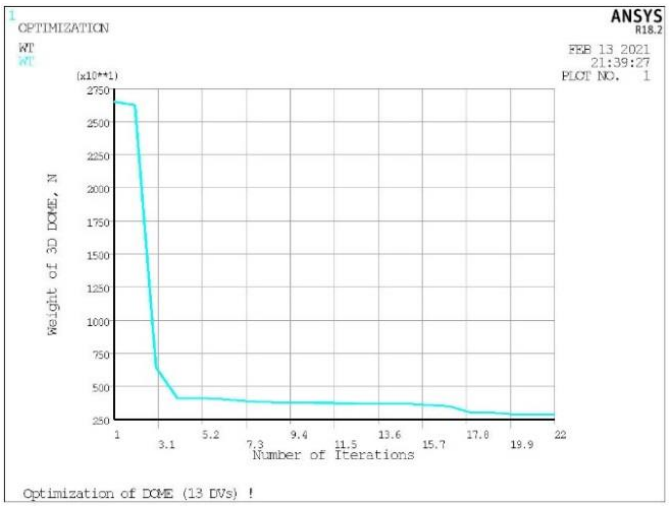

Рис. 17. График зависимости целевой функции от числа итераций

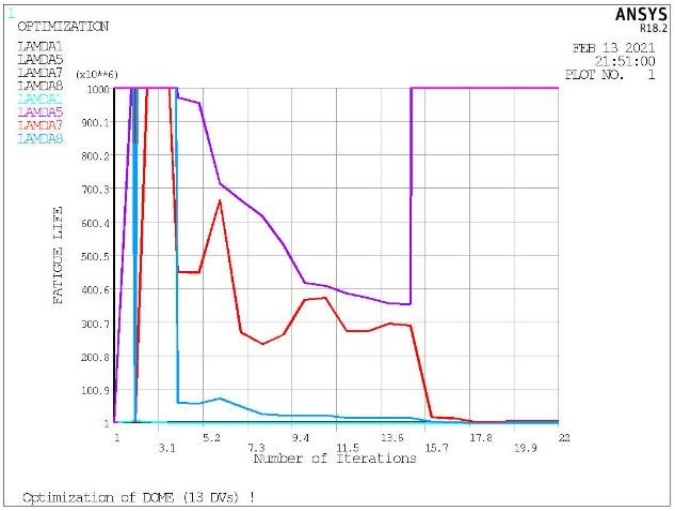

Рис. 18. Графики зависимостей усталостной долговечности элементов 1, 5, 7, 8 от числа итераций

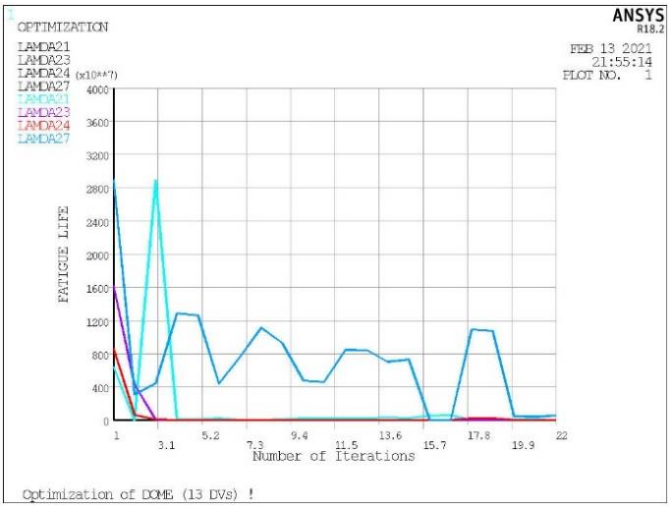

Рис. 19. Графики зависимостей усталостной долговечности элементов 21, 23, 24, 27 от числа итераций

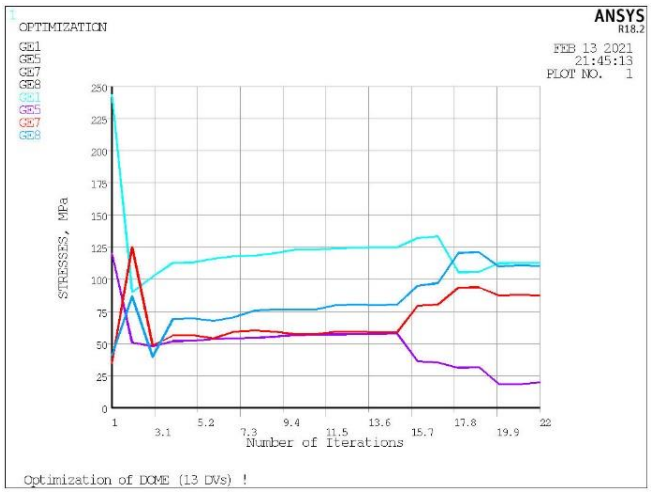

Рис. 20. Графики зависимостей приведенных напряжений элементов 1, 5, 7, 8 от числа итераций

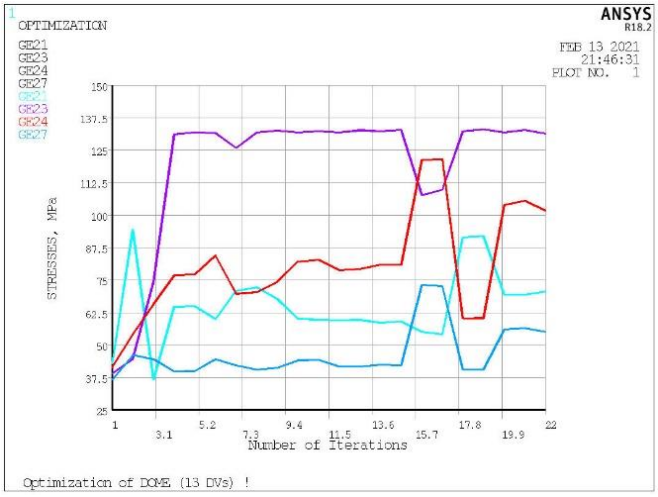

Рис. 21. Графики зависимостей приведенных напряжений элементов 21, 23, 24, 27 от числа итераций

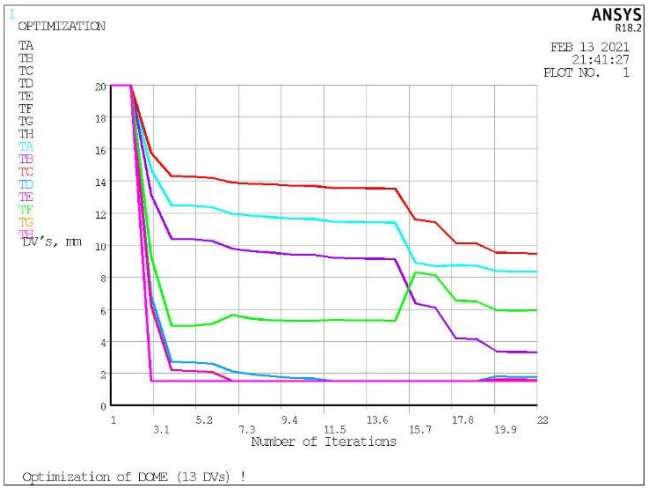

Рис. 22. Графики зависимостей варьируемых параметров от числа итераций. Толщины

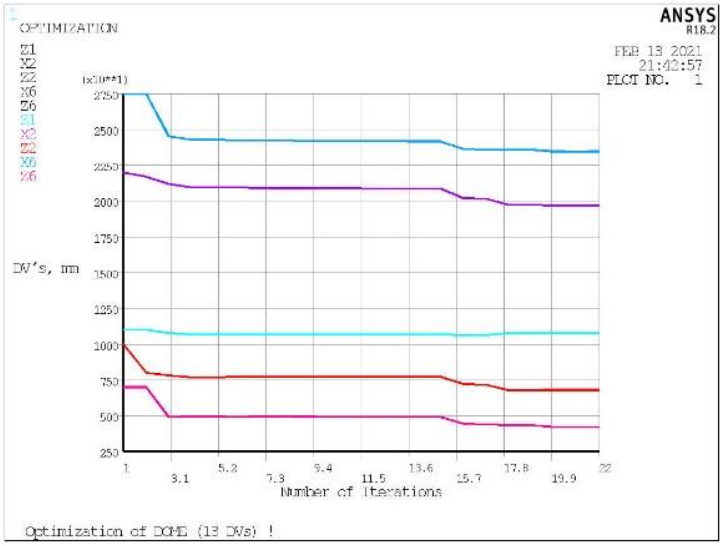

Рис. 23. Графики зависимостей варьируемых параметров от числа итераций. Координаты

Таблица 3.

Начальный и оптимальный проекты 52-элементной пространственной рамы

DV's, мм	Варьируемые параметры	
	Начальные	**Оптимальные**
t_1	20	8,358
t_2	20	3,335
t_3	20	9,503
t_4	20	1,793
t_5	20	1,609
t_6	20	5,912
t_7	20	1,522
t_8	20	1,5
Z_1	11000	10769
X_2	22000	19701
Z_2	10000	6810,9
X_6	27500	23466
Z_6	7000	4205,7
Вес, H	26523	2890,1

Выводы

Сформулирована задача оптимизации по весу линейно упругих стержневых конструкций под действием полигармонических и постоянных нагрузок с учетом усталостной долговечности. Управляемыми параметрами служат размеры поперечных сечений и координаты узлов конструкции, которые объединяются в типы и группы. Представлен метод для

анализа чувствительности экстремальной усталостной долговечности. Рассмотрены три примера:

1) *шарнирно опертая балка* с двумя варьируемыми параметрами проектирования под действием равномерно распределенной гармонической нагрузки.

2) *плоская рамная конструкция*, где независимыми переменными проектирования являются две толщины кольцевых поперечных сечений, находящаяся под действием гармонического момента.

3) *пятидесятидвухэлементная пространственная рама* с 8 типами кольцевых поперечных сечений элементов и 5 группами координат, находящаяся под действием вертикальной циклической нагрузки.

Численные результаты, полученные в *Ansys* и *Mathematica*, хорошо согласуются друг с другом.

Библиографический список

1. Когаев, В.П. Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени [Текст] / В.П. Когаев. – М.: Машиностроение, 1993. – 364 с.
2. Xiaolin, C. Finite element modeling and Simulation with ANSYS Workbench [Текст] / C. Xiaolin, L. Yijun. – CRC Press, 2015. P. 364.
3. Малков, В.П. Анализ чувствительности и оптимизация динамически нагруженных пространственных рам с учетом усталостной долговечности [Текст] / В.П. Малков, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева, О.А. Сергеев // Численное моделирование физико-механических процессов. – М.: Товарищество КМК, 1999. С. 82-102.
4. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды. Практическое руководство [Текст] / сост. А.К. Любимов – Н. Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2006. – 227 с.
5. Берендеев, Н.Н. Методы решения задач усталости в пакете ANSYS WORKBENCH. Учебно-методическое пособие [Текст] / Н.Н. Берендеев. – Н. Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского 2012. – 64 с.
6. Сергеева, С.А. Анализ чувствительности и оптимизация пространственных рамных конструкций с учетом ограничений по усталостной долговечности: автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Н. Новгород,1997. – 20 с.
7. Sergeev, O.A. Sensitivity analysis and dynamic optimization of 3D frames with account for fatigue life [Текст] / O.A Sergeev, V.G. Kiselev // 1st ASMO UK/ISSMO conference on Engineering Design Optimization. – West Yorkshire, UK. 1999, P. 329-336.